Sea f un endomorfismo en un espacio vectorial complejo cuya matriz asociada respecto de una base B es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ i & 0 & -i \end{pmatrix}$$

siendo i la unidad imaginaria.

a) ¿Es f diagonalizable? Razonar la respuesta.

b) Calcular, si es posible, una matriz diagonal semejante a A y una base respecto de la cual la matriz asociada a f sea dicha diagonal.

c) Calcular, usando lo anterior, A^4. ¿Es posible calcular A^{-4}? Razonar la respuesta.

a) $$p(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ i & 0 & -i-\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)(2-\lambda)(-i-\lambda) = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} -\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \\ 2-\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 2 \\ -i-\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -i \end{array}\right\}$$

valores propios distintos

$\Downarrow$

f es diagonalizable.

b) $$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$$

$$V_0 = \left\{ (x,y,z) \,/\, (A - 0I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ i & 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2y = 0 \\ ix - iz = 0 \end{array}\right\}$$

$\Downarrow$

$x = z$

$y = 0$

$$\left.\begin{array}{l} x = \alpha \\ y = 0 \\ z = \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow B_{V_0} = \{(1,0,1)\}$$